

# Tsunamis et vagues extrêmes

Frédéric Dias<sup>1</sup>

<sup>1</sup>Ecole Normale Supérieure de Cachan  
Centre de Mathématiques et de Leurs Applications

Sophia-Antipolis

# Tsunamis dans la Méditerranée

## Thucydide - La guerre du Péloponnèse (431-411 BC)

- “Tandis que des séismes se produisaient, en Eubée à Orobiai, la mer recula loin de ce qui était alors la terre, puis se souleva et envahit un secteur du territoire de la cité, dont elle submergea une partie, si bien qu’est actuellement mer ce qui auparavant était terre; et la mer fit périr tous les gens qui n’avaient pas pu la devancer en courant sur les hauteurs”
- “La cause d’un tel phénomène est, à mon avis, qu’au point où le séisme est le plus fort, à cet endroit la mer se rétracte, puis soudain s’étirant en sens inverse produit une vague plus violente ; tandis que sans séisme il ne me semble pas qu’un tel phénomène puisse se produire”

## Remarques historiques

- **1er Novembre 1755** : un puissant tremblement de terre à l'Ouest de la côte du Portugal déclenche un tsunami avec des run-ups supérieurs à 20 mètres.
- **Laplace [1776]** : *“La plus simple manière de concevoir la formation de vagues, c'est d'imaginer un objet arbitraire, plongé dans un liquide à une faible profondeur et maintenu dans cet état jusqu'à ce que le fluide soit en équilibre; quand l'on retire cet objet du liquide, il est clair que le liquide aura tendance à retrouver son état d'équilibre en formant des vagues successives”*
- La plupart des extraits historiques proviennent de l'article de Darrigol (2003), [The spirited horse, the engineer, and the mathematician: water waves in nineteenth-century hydrodynamics](#).

## Remarques historiques

- **Laplace [1776]** : est le premier à obtenir la relation de dispersion pour les vagues

$$c = \sqrt{\frac{g}{k} \operatorname{th}(kd)}$$

où  $c$  est la célérité de la vague,  $g$  l'accélération due à la gravité,  $k$  le nombre d'onde et  $d$  la profondeur.

- **Lagrange [1781]** : étudie la propagation des vagues en eau peu profonde (longueur d'onde  $\gg$  profondeur) et trouve que le profil de la vague est de la forme

$$\eta(x, t) = f(x - ct) + g(x + ct)$$

où  $f$  et  $g$  sont deux fonctions arbitraires et  $c = \sqrt{gd}$ .

## Remarques historiques

- **Laplace [1813]** : Un comité de l'Académie composé de Legendre, Poinsot, Laplace, Biot et Poisson choisit le thème des vagues comme sujet pour le prix de l'Académie pour l'année 1816.
- Annonce écrite par Laplace : *Un fluide pesant, initialement au repos et de profondeur infinie, est mis en mouvement sous l'effet d'une force donnée. Quelle est, à un temps donné, la forme de la surface libre et la vitesse des particules situées sur la surface libre?*

## Remarques historiques

- Poisson, le brillant disciple de Laplace qui faisait partie du comité, écrivit le premier mémoire sur le sujet. Il fut lu en 1815 et publié en 1818.
- Poisson considéra le célèbre problème du caillou jeté dans une mare et obtint le profil de la surface libre

$$\eta(x, t) = \frac{A\alpha}{x\sqrt{\pi}} \cos(\alpha^2 - \pi/4), \quad \alpha = \sqrt{gt^2/4x}$$

Le comportement est dominé par les oscillations rapides du cosinus, avec une amplitude qui croît linéairement en temps et décroît en  $x^{-3/2}$ .

# Remarques historiques

- Etant lui-même un membre de l'Académie et du comité, Poisson ne pouvait pas être candidat pour le prix sur les vagues!
- Cauchy fut le lauréat. Son mémoire fut publié en 1827 (11 ans plus tard).
- D'un point de vue mathématique, Cauchy était plus rigoureux que Poisson. Il prouva par exemple que le mouvement du fluide initialement au repos pouvait être considéré à tout instant comme créé par des forces impulsives.

## Remarques historiques

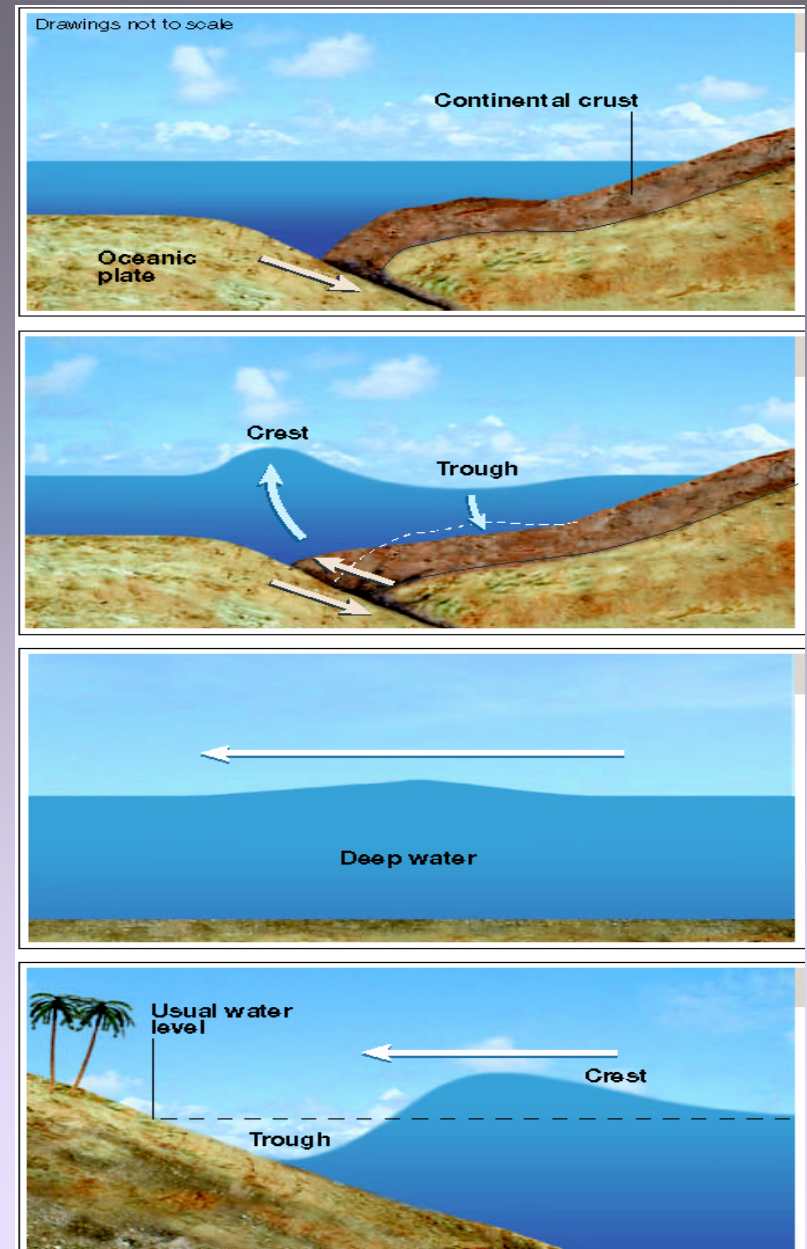
- Les travaux de Poisson et Cauchy ont été considérés comme obscurs pendant longtemps. Comme le dit Thomson (Lord Kelvin): *Une bonne partie de ce que Poisson et Cauchy ont à dire serait abrégée par l'ajout de graphes, et il serait plus facile pour tout le monde (y compris les auteurs) de comprendre la globalité des phénomènes étudiés*



# Mécanisme de déclenchement de tsunami par déplacement du fond marin suite à un tremblement de terre

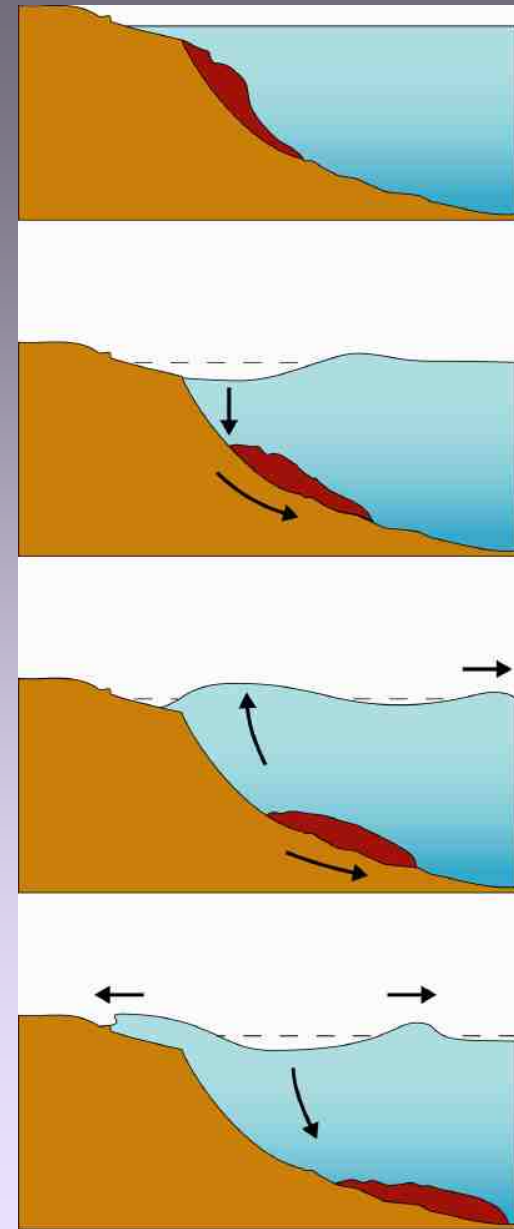
Exemple: tsunami de l'Océan Indien (26 Décembre 2004)

[Nature 1/27/05 Vol. 433]



# Mécanisme de déclenchement de tsunami par éboulement sous-marin

Exemple: tsunami de  
Papouasie/Nouvelle Guinée (1998)



# Hypothèses

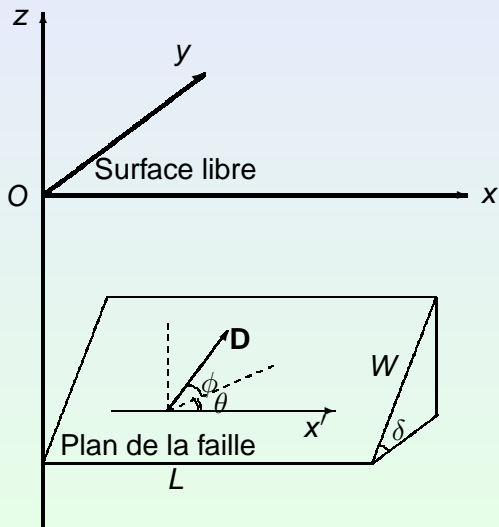
- Courbure de la terre négligée
- Milieu semi-infini, homogène et isotrope
- Lois classiques de l'élasticité linéaire
- Théorie des dislocations de Volterra (1907) - [Sur l'équilibre des corps élastiques multiples connexes](#)

# Théorie des dislocations de Volterra pour un milieu élastique infini

- Une force ponctuelle  $\mathbf{F}^k = F\mathbf{e}_k$  en  $O$  engendre un champ de déplacement au point  $P$
- Puis la loi de Hooke permet de calculer les contraintes  $\sigma^k$
- La force par unité de surface  $\mathbf{T}^k$  est égale à  $\sigma^k\mathbf{n}$
- Une dislocation de Volterra est une surface  $\Sigma$  dans le milieu élastique à travers laquelle il y a une discontinuité  $\Delta\mathbf{u} = \mathbf{u}^+ - \mathbf{u}^-$  dans les champs de déplacement.
- Le déplacement en un point  $Q$  est alors donné par

$$u_k(Q) = \frac{1}{F} \iint_{\Sigma} \Delta\mathbf{u} \mathbf{T}^k dS$$

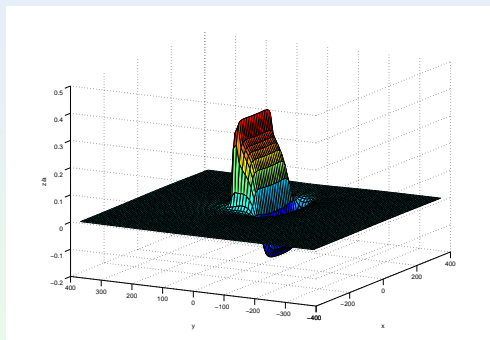
# Source rectangulaire de taille finie



## Paramètres typiques

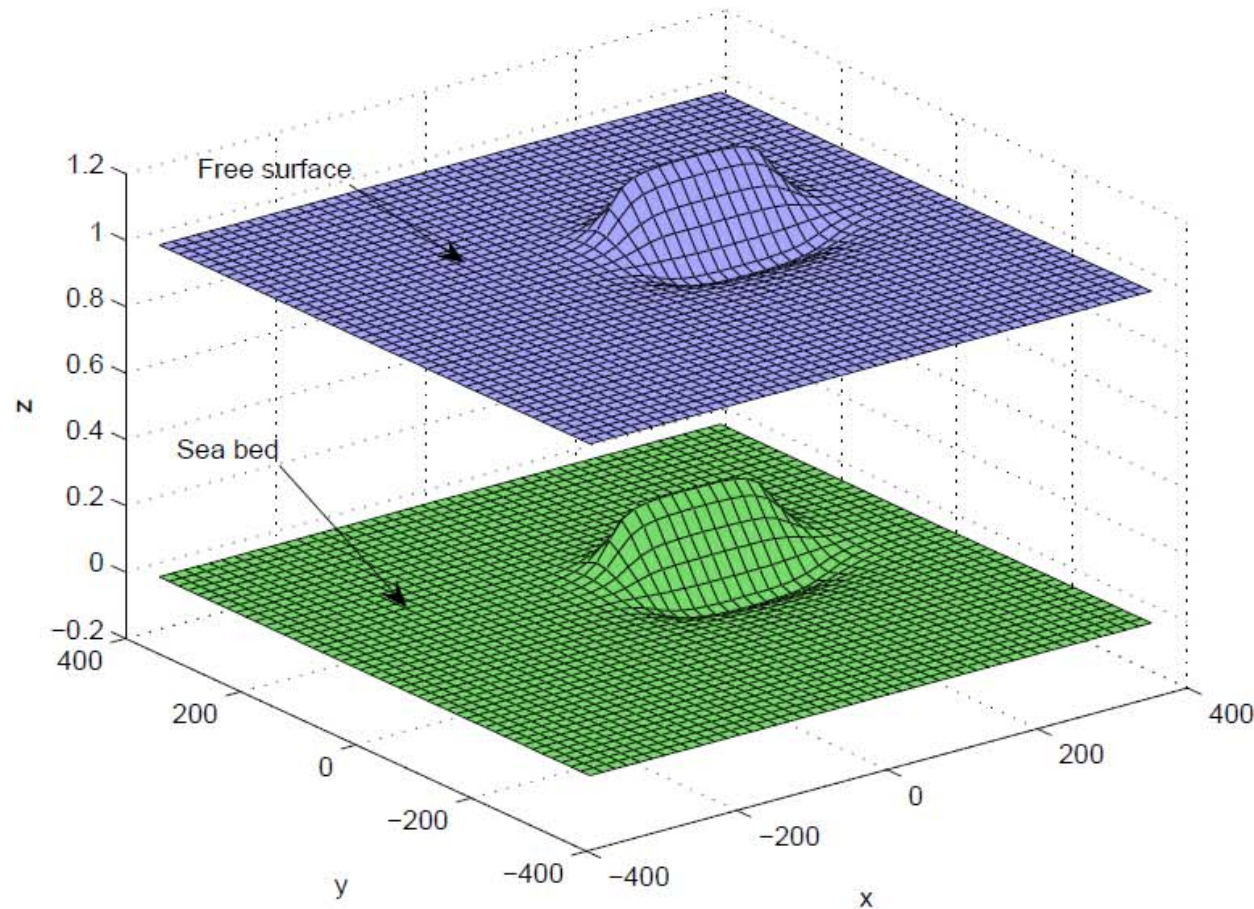
| <i>paramètre</i>                        | <i>valeur</i> |
|---|---------------|
| Angle avec l'horizontale (dip) $\delta$ | 13°           |
| Angle du glissement (rake) $\theta$     | 100°          |
| Profondeur de la faille $d$ , km        | 25            |
| Longueur de la faille $L$ , km          | 220           |
| Largeur de la faille $W$ , km           | 90            |
| Déplacement $U$ , m                     | 15            |
| Module de Young $E$ , GPa               | 9.5           |
| Coefficient de Poisson $\nu$            | 0.23          |

# Déformation du fond de l'océan



# Méthode classique de génération

Remettre les déformations cosismiques directement à la surface libre et laisser propager :





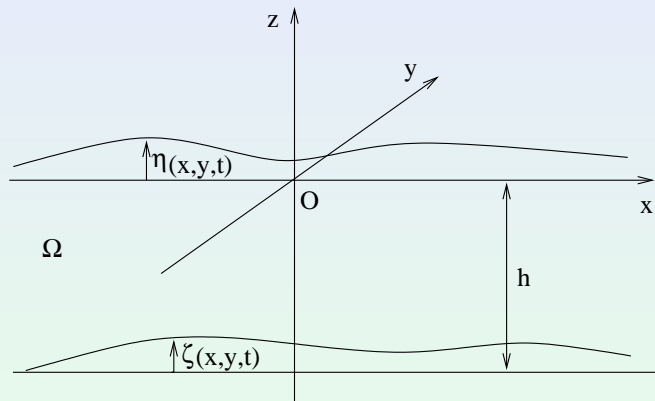
# Approche déterministe

- Equations d'Euler ou modèles (système de Boussinesq par exemple)
- On recherche le profil de la surface de l'eau  $\eta(x, y, t)$  (par exemple)
- Pour la discrétisation numérique,  $\Delta x$  de l'ordre de  $L/10$  à  $L/50$
- Pour la discrétisation numérique,  $\Delta t$  de l'ordre de  $T/10$  à  $T/50$

## $\Delta x$ et $\Delta t$ typiques

| <i>Grande profondeur</i>  | <i>Faible profondeur</i>             |
|---------------------------|--------------------------------------|
| $T = 1000 \text{ s}$      | $T = 1000 \text{ s}$                 |
| $d = 4 \text{ km}$        | $d = 40 \text{ m}$                   |
| $c = 720 \text{ km/h}$    | $c = 72 \text{ km/h}$                |
| $L = 200 \text{ km}$      | $L = 20 \text{ km}$                  |
| $a = 60 \text{ cm}$       | $a = 60 \times \sqrt{10} \text{ cm}$ |
| $\Delta x = 4 \text{ km}$ | $\Delta x = 400 \text{ m}$           |
| $\Delta t = 20 \text{ s}$ | $\Delta t = 20 \text{ s}$            |

# Géométrie du domaine fluide



$$\Omega = \mathbb{R}^2 \times [-h + \zeta(x, y, t), \eta(x, y, t)]$$

# Hypothèses

- Liquide non-visqueux et incompressible
- Ecoulement irrotationnel (on introduit le potentiel des vitesses  $\phi$ )
- Ecoulement mono-phasique

# Equations du problème

- $\Delta\phi = 0, (x, y, z) \in \Omega$
- Conditions aux limites cinématiques sur la surface libre et sur le fond

$$\frac{\partial\phi}{\partial z} = \frac{\partial\eta}{\partial t} + \frac{\partial\phi}{\partial x} \frac{\partial\eta}{\partial x} + \frac{\partial\phi}{\partial y} \frac{\partial\eta}{\partial y}, \quad z = \eta(x, y, t),$$

$$\frac{\partial\phi}{\partial z} = \frac{\partial\zeta}{\partial t} + \frac{\partial\phi}{\partial x} \frac{\partial\zeta}{\partial x} + \frac{\partial\phi}{\partial y} \frac{\partial\zeta}{\partial y}, \quad z = -h + \zeta(x, y, t)$$

- Condition dynamique sur la surface libre

$$\frac{\partial\phi}{\partial t} + \frac{1}{2} |\nabla\phi|^2 + g\eta = 0, \quad z = \eta(x, y, t)$$

# Difficultés

- C'est un problème très complexe, aussi bien du point de vue analytique que numérique
- Par exemple, la preuve d'existence d'ondes stationnaires (clapotis) n'a été obtenue que très récemment par **G. looss**, Toland et Plotnikov
- Résolution numérique très coûteuse

# Linéarisation du problème

- Le problème linéarisé peut être résolu avec les transformées de Fourier (en espace) et de Laplace (en temps)
- Considérons un déplacement du fond de la forme  $\zeta(x, y, t) = \zeta(x, y)T(t)$  (Hammack 1973)
- Pour la partie spatiale, prenons la solution d'Okada
- Pour la partie temporelle, prenons une fonction de Heaviside

# Premières secondes d'un tsunami

## Solution du problème linéarisé

- Le film montre la surface libre. On peut aussi calculer les vitesses et la pression en tout point. Calculs réalisés par D. Dutykh.



# Petits paramètres

Les nombres sans dimension suivants (supposés petits) sont introduits:

$$\alpha = \frac{a}{d} \ll 1, \quad \beta = \frac{d^2}{\ell^2} \ll 1,$$

- $d$  = profondeur d'eau caractéristique
- $a$  = hauteur de vague caractéristique
- $\ell$  = longueur d'onde caractéristique

## Valeurs pour le tsunami de l'océan indien

- Les observations du tsunami par satellite indiquent une amplitude  $a$  d'environ 60 cm en pleine mer
- La longueur d'onde caractéristique calculée à partir des segments qui ont subi un glissement le long de la faille est comprise entre 160 et 240 km (Lay et al. 2005)
- La profondeur d'eau va de 4 km vers l'ouest de la rupture à 1 km vers l'est

$$1.5 \times 10^{-4} < \alpha < 6 \times 10^{-4}, \quad 1.7 \times 10^{-5} < \beta < 6.25 \times 10^{-4}$$

# Equations adimensionnelles

- Introduction de variables dépendantes et indépendantes adimensionnelles
- Apparition des petits paramètres  $\alpha$  et  $\beta$  dans les équations
- Introduction du nombre de Stokes

$$S = \frac{\alpha}{\beta} = \frac{al^2}{d^3}$$

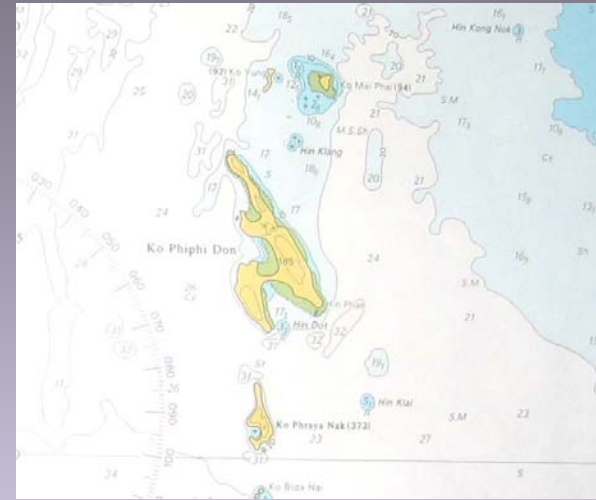
# Dispersion et nonlinéarité

- Si  $S \approx 1$ , les effets de la dispersion et les effets nonlinéaires sont du même ordre de grandeur
- Pour le tsunami de l'océan indien  $0.24 < S < 46$
- Puisque le cube de la profondeur apparaît au dénominateur de  $S = \alpha/\beta = al^2/d^3$ ,  $S$  est 64 fois plus grand en profondeur de 1 km qu'en profondeur de 4 km
- A partir de cet argument, la dispersion est plus importante à l'ouest de la rupture

# Les équations de Boussinesq

- Différents systèmes peuvent être obtenus en fonction des termes en  $\alpha$  et  $\beta$  retenus dans les équations.
- Modèle de Boussinesq utilisé pour la propagation des tsunamis : FUNWAVE (Kirby et ses collaborateurs)
- Lors du passage d'un tsunami, toute la colonne d'eau bouge
- En utilisant un certain nombre d'astuces, les codes de propagation peuvent également donner des indications sur le run-up (hauteur maximale atteinte par le tsunami) et l'inondation (pénétration horizontale maximale).

# Cas d'étude pour le tsunami : Ko Phi Phi



# Arrivée du tsunami sur la rive nord de l'île de Ko Phi Phi

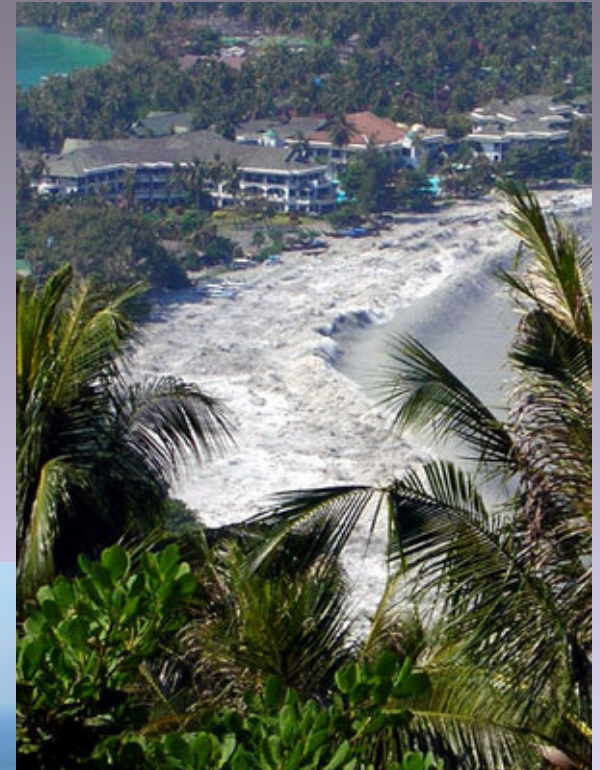


Photos prises par C. Malatesta

(1) Arrivée de l'onde de dépression

(2)-(3) Arrivée de l'onde d'élévation

(4) Runup suivant l'onde d'élévation



# Runup sur l'île de Ko Phi Phi



- (1) Réflexion de l'onde d'élévation
- (2) Plage N inondée jusqu'au 2<sup>e</sup> étage et arrivée du tsunami dans le port S
- (3) Inondation N-S à travers la bande de terre
- (4) Accumulation de débris dans le port



# Cas d'étude : Ko Phi Phi



- (1) Ressaut ondulé s'éloignant de la rive N
- (2) Après les premiers efforts de nettoyage (Fév 2005)
- (3) Toits des bungalows de la rive N transportés jusqu'à la plage S

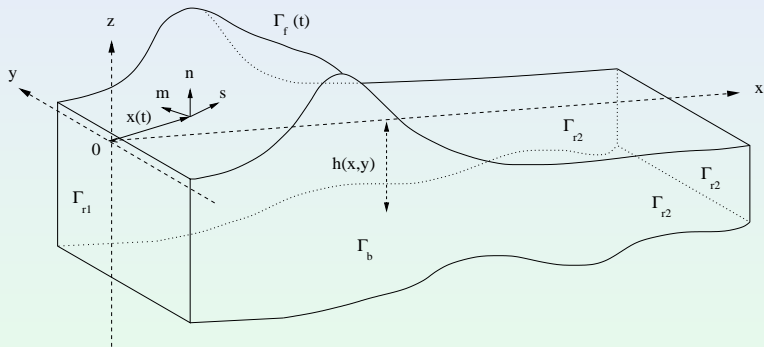
## L'impact du tsunami, run-up et inondation

- Les bâtiments construits selon des critères de sécurité récents (béton armé) ont bien résisté
- Capables de résister à une pression du front d'onde de l'ordre d'1 atmosphère (une pression  $p$  équivalente serait obtenue avec un vent de vitesse  $U = 450$  m/s, puisque  $p = \rho_{\text{air}} U^2 / 2$ )
- En revanche, les bâtiments en brique se sont écroulés et ont été emportés. Les structures poreuses ou ouvertes ont survécu.
- Les bâtiments plus éloignés de la plage ont parfois survécu, mais ont ensuite été détruits par l'érosion du sol autour des bâtiments due aux courants (Hunt 2005)
- Comment faut-il construire les bâtiments? (dilemme)

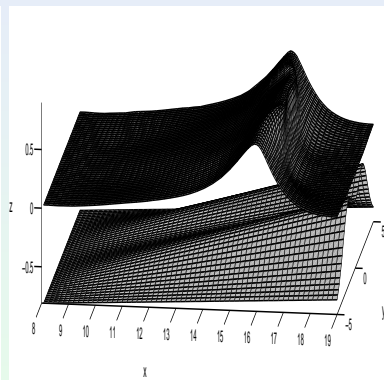
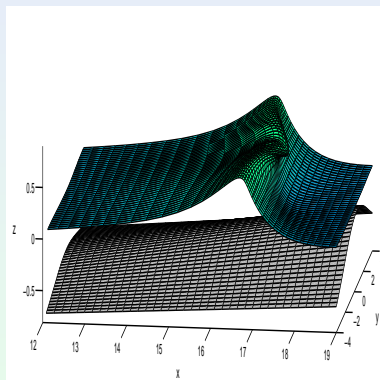
## Canal à houle numérique

- Formulation intégrale du problème et méthode d'éléments à la frontière
- Fochesato & D (2006) ont incorporé l'algorithme rapide des multipôles et ainsi obtenu une complexité d'ordre  $O(N)$  ou presque
- L'algorithme rapide des multipôles a été utilisé pour la première fois en 3D pour des problèmes de Laplacien par Greengard & Rokhlin (1997)

# Canal à houle typique

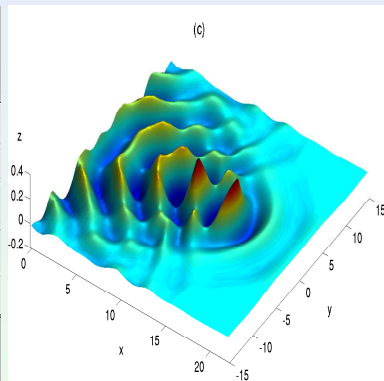
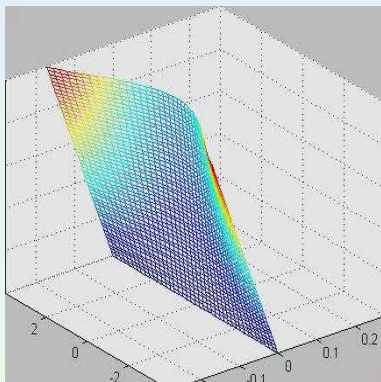


# Exemple



Shoaling d'une onde solitaire.

# Focalisation d'énergie dans un canal à houle



# Vagues scélérates

Impact de vagues scélérates sur structures parfois dévastateur.



# Ballotement dans les réservoirs

- Réservoir d'ergol dans les fusées
- Réservoir de gaz naturel liquéfié



# Hypothèses

## AVANT

- Liquide non-visqueux et incompressible
- Ecoulement irrotationnel
- Ecoulement mono-phasique

## ICI

- Ecoulement di-phasique
- Fluides non-visqueux
- Liquide incompressible, gaz compressible

## Système de trois équations

Considérons une phase liquide ( $\rho^+ = \rho_0^+$ ) et une phase gazeuse ( $\rho^-$ ).

$$\rho_t + \operatorname{div}(\rho u) = 0, \quad (1)$$

$$\alpha_t^+ + \operatorname{div}(\alpha^+ u) = 0, \quad (2)$$

$$(\rho u)_t + \operatorname{div}(\rho u \otimes u) + \nabla p = \rho g, \quad (3)$$

$$\rho = \alpha^+ \rho_0^+ + \alpha^- \rho^-, \quad p = P(\rho^-).$$

Système bien connu dans le cadre des écoulements liquide-vapeur. Utilisé par Peregrine (Bristol) pour l'étude des impacts de vagues.

# Simulation de phénomènes d'impacts de vagues

- Travail en collaboration avec J.-M. Ghidaglia (ENS-Cachan)
- Application au ballottement dans les cuves de méthaniers
- Impact de vagues sur des parois (pics impulsifs de pression ou impacts suivis d'oscillations)
- Bon accord avec les expériences
- Vitesse du son dans un mélange :

$$c_s = c^- \sqrt{\frac{\rho^-}{\alpha^- \rho}}, \quad c^- = \sqrt{\frac{dP(\rho^-)}{d\rho^-}} \quad (\text{vitesse du son dans le gaz})$$

# Forte influence de l'aération sur la vitesse du son

Pour de l'air et de l'eau sous conditions normales

|                 |      |      |     |
|-----------------|------|------|-----|
| $\alpha^-$      | 0.01 | 0.04 | 0.1 |
| $c_s (ms^{-1})$ | 120  | 60   | 40  |

- Pour  $\alpha^- = 0$  (pas d'air),  $c_s = 1500$  m/s
- Pour  $\alpha^- = 1$  (que du gaz),  $c_s = 340$  m/s

## Formule pour la pression d'impact

- Pression sur une paroi due à un écoulement diphasique de l'ordre de

$$\rho u C_s$$

$\rho$ : densité du mélange,  $u$ : vitesse moyenne

- Pression sur une paroi souvent considérée comme étant donnée par

$$\rho u^2$$

- Contradiction?
- Pression avec un modèle diphasique plus sophistiqué de traînée nulle

$$\rho^+ u C^-$$

# Intégration numérique du système avec 3 équations

## Film

Ballotement dans un réservoir, calculé avec une méthode de volumes finis (VFFC).